Electrostatique 2023 – Corrigé barème

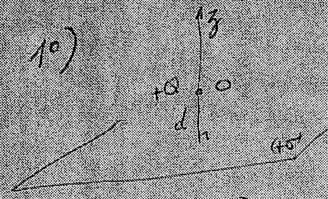
Exo 1 : TP

1) 1 point schémas (0,5), explications (0,5)

2) 1 point signe des charges (0,5), influence partielle (0,5)

Exo 2

1°)



Soit $\vec{E_Q}$ le champ généré par la charge ponctuelle Q

Soit $\vec{E_P}$ le champ généré par le plan infini

$\vec{E}(P_0) = \vec{E_Q}(P_0) + \vec{E_P}(P_0) = \vec{0}$ il faut donc que

1°) $\vec{E_Q}(P_0)$ et $\vec{E_P}(P_0)$ soit colinéaires ceci n'est possible que si P_0 est placé sur l'axe $(O, z) \to P_0(0, 0, z_0)$

2°) il faut de plus que $\vec{E_Q}(P_0)$ et $\vec{E_P}(P_0)$ pointent dans des directions opposées ceci n'est vrai que si z_0 / (1)

$-d < z_0 < 0$

NOT MANDATORY

3°) il faut que les 2 vecteurs aient le même module il faut donc que σ soit suffisante pour s'opposer à +Q $E_P(P_0) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$E_Q(P_0)_{\min}$ en $z = -d^+ = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$

et donc $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \geq \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \to \sigma \geq \dfrac{Q}{4\pi d^2}$

2°) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z_0^2} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \to z_0^2 = \dfrac{Q}{4\pi\sigma} \to z_0 = \pm\sqrt{\dfrac{Q}{4\pi\sigma}}$ avec $z_0 < 0$

donc $\boxed{z_0 = -\sqrt{\dfrac{Q}{4\pi\sigma}}}$ (1)

3°) il faut aussi que $z_0 > -d \to \sqrt{\dfrac{Q}{4\pi\sigma}} < d \to \dfrac{Q}{4\pi\sigma} < d^2 \to \boxed{\sigma \geq \dfrac{Q}{4\pi d^2}}$ (1)

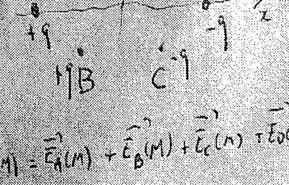
4°) $\phi_1 = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = Q/\varepsilon_0$ Théorème de Gauss (1)

5°) si $h < d$ $\quad \phi_2 = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma \cdot \pi D^2}{4\varepsilon_0}$ (0,5)

si $h > d$ $\quad \phi_2 = \dfrac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma\pi D^2}{4\varepsilon_0} + \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ (0,5)

Théorème de Gauss

Exo 3



1°) $(x, 0, y)$ plan de symétrie donc $E_z(M) = 0$ (1)

$(y, 0, z)$ plan d'antisymétrie donc $\vec{E}(M) = E_x \vec{e_x}$

2°) $\vec{E}(M) = \vec{E_A}(M) + \vec{E_B}(M) + \vec{E_C}(M) + \vec{E_D}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\begin{pmatrix} 2a/(4a^2+y^2)^{3/2} \\ y/(4a^2+y^2)^{3/2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/(a^2+(y+a)^2)^{3/2} \\ (y+a)/(a^2+(y+a)^2)^{3/2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2a/(4a^2+y^2)^{3/2} \\ y/(4a^2+y^2)^{3/2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right.$

$= \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{4a}{(4a^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{2a}{(a^2+(y+a)^2)^{3/2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ au point O, $y = 0 \to \vec{E}(O) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{4a}{8a^3} + \dfrac{2a}{2\sqrt{2}a^3}\right)\vec{e_y}$

$$\vec{E}(O) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2a^2} + \frac{\sqrt{2}}{2a^2}\right)\vec{e_y} = \boxed{\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^2}(1+\sqrt{2})\,\vec{e_y}}$$ (1)

module $\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a^2}(1+\sqrt{2})$

3°) A.N. $\vec{E}(O) = \frac{10^{-9} \times 9\,10^{9}\,(2{,}4)}{9\,10^{-6}} = 2{,}4\,10^{6} = 2{,}4\,\text{MV/m}$ (1)

4°) $V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2a)} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a\sqrt{2})} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a\sqrt{2})} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(2a)} = 0$ (1)

EX04

1°) 2 invariances → coord. cylindriques $\vec{E} = E_r(r)\vec{e_r} + E_\theta(r)\vec{e_\theta} + E_z(r)\vec{e_z}$

plan contenant M et l'axe z, plan de sym. → $E_\theta = 0$ (1)

plan contenant M et ⊥ à l'axe z, plan de sym → $E_z = 0$

↳ $\boxed{\vec{E} = E_r(r)\vec{e_r}}$

2°) Surface de Gauss = cylindre de rayon r, d'axe z et de hauteur h + 2 disques

$\phi_{S_{fermée}} = \underbrace{\phi_{S_1} + \phi_{S_2}}_{=0 \text{ car } \vec{E} \perp d\vec{S}} + \phi_{S_L} = \phi_{S_L} = E_r(r)\int_{S_L} dS = E_r(r)\,.\,2\pi r h$

$\sum Q_{int} = h.\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho$ donc $E_r(r) = \frac{\pi\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 \pi r}$

→ $\boxed{E_{r\,ext}(r) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}}$ (1,5)

3°) $\text{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ → $\frac{1}{r}\frac{\partial(r E_{r\,paroi}(r))}{\partial r} = \rho/\varepsilon_0$ (1,5)

→ $\frac{\partial}{\partial r}(r E_{r\,paroi}) = \frac{r\rho}{\varepsilon_0}$ → $r E_{r\,paroi}(r) = \frac{r^2\rho}{2\varepsilon_0} + C$

→ $\boxed{E_{r\,paroi}(r) = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0} + \frac{C}{r}}$

4°) $E_{r\,ext}(r = R_2) = E_{r\,paroi}(r = R_2)$ → $\frac{R_2\rho}{2\varepsilon_0} + \frac{C}{R_2} = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 R_2} = \frac{\rho R_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 R_2}$

→ $C = -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}$ (1)

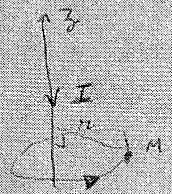
$\vec{E}_{paroi}(r) = \left(\frac{r\rho}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}\right)\vec{e_r} = \boxed{\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right)\vec{e_r}}$

5°) idem que 2°) ici $\sum Q_{int} = 0$ et donc $\boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0}}$ (0,5)

6°) $\vec{E}_{int}(r = R_1) = \vec{0}$ et $\vec{E}_{paroi}(r = R_1) = \frac{\rho R_1}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{R_1^2}{R_1^2}\right)\vec{e_r} = \vec{0}$ (0,5)

le champ est donc continu

Exo5



1°) Invariance par translation le long de z et rotation autour de z

donc $\vec{B}(M) = \vec{B}_r(r)\vec{e_r} + B_\theta(r)\vec{e_\theta} + B_z(r)\vec{e_z}$

→ syst cylindrique (1)

2°) - plan P_1 contenant M et contenant l'axe z est un plan de symétrie (1)

donc $\vec{B}(M)$ est ⊥ à ce plan donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{e_\theta}$

- plan P_2 contenant M ⊥ l'axe z est un plan d'antisymétrie donc $\vec{B}(M) \in$ à ce plan

3°) contour fermé cercle de rayon r passant par M et ⊥ à l'axe z parcouru dans le sens trigonométrique

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = \oint_C B_\theta \vec{e_\theta} . r d\theta \, \vec{e_\theta}$$

$$= \oint_C B_\theta . r \, d\theta$$

$$= B_\theta(r).r \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi r \, B_\theta(r)$$

$= \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}} = -\mu_0 I$ le courant orienté vers le bas est ici compté négativement pour le sens de parcours choisi

et donc $B_\theta(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ → $\boxed{\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta}}$ (1)

4°) (1,2)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{rot}\,\vec{A}$$

mais $\vec{A}$ est un vrai vecteur

donc $\vec{A} \perp$ à P_2 et donc $\vec{A} = A_z(r)\vec{e_z}$

donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}$ → $\frac{\partial A_z(r)}{\partial r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

→ $\boxed{A_z(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}}$

si $r = r_0$ → $A_z(r_0) = 0$